3.17)

Como $\{v_1, v_2\}$ no es una base ortogonal, busco una:

Tomo $w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \left(\frac{\overbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}^{\mathrm{I}}}{\underbrace{\|v_1\|^2}_{\mathrm{II}}} \right) v_1 \qquad \Delta$$

$\mathrm{I} \rightarrow \langle [1\ 0\ -1\ 0]^T, [1\ -1\ 0\ 0]^T \rangle = 1$

$\mathrm{II} \rightarrow \langle [1\ -1\ 0\ 0]^T, [1\ -1\ 0\ 0]^T \rangle = 2$

$\Delta \rightarrow w_2 = [1\ 0\ -1\ 0]^T - \frac{1}{2} \cdot [1\ -1\ 0\ 0]^T$

$\rightarrow w_2 = [1\ 0\ -1\ 0]^T - [\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\ 0\ 0]$

$\rightarrow w_2 = [\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ -1\ 0]$ $\times 2 = [1\ 1\ -2\ 0]$

Entonces una base ortogonal será:

$$B = \{[1\ -1\ 0\ 0]^T, [1\ 1\ -2\ 0]^T\}$$

y ahora puedo aplicar la fórmula de proyección:

$$P_S([x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T) = \frac{\langle [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T, [1\ -1\ 0\ 0]^T \rangle}{\|[1\ -1\ 0\ 0]^T\|^2} \cdot [1\ -1\ 0\ 0]^T + \frac{\langle [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T, [1\ 1\ -2\ 0]^T \rangle}{\|[1\ 1\ -2\ 0]^T\|^2} \cdot [1\ 1\ -2\ 0]^T$$

$$\to P_S([x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T) = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) \cdot [1\ -1\ 0\ 0]^T + \left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{6}\right) \cdot [1\ 1\ -2\ 0]^T$$

$$\to P_S([x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T) = \left[\frac{x_1 - x_2}{2}\ \ \frac{-x_1 + x_2}{2}\ \ 0\ \ 0\right]^T + \left[\frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{6}\ \ \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{6}\ \ 0\ \ 0\right]^T$$

$$\to P_S([x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T) = \left[\frac{4x_1 - 2x_2 - 2x_3}{6}\ \ \frac{-2x_1 + 4x_2 - 2x_3}{6}\ \ 0\ \ 0\right]^T$$

$$\to P_S([x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Por lo que $$\boxed{P_{S\,E}^{\ \,E} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

b) Pongo en lo calculado en a) $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = (1\ 1\ 1\ 1)$

$$\rightarrow P_S(b) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \rightarrow b \in S^{\perp}$$

c) distancia entre b y S la puedo calcular como:

$$d(b, P_S(b)) = \| b - \underbrace{P_S(b)}_{=\vec{0}} \| = \|b\| = \| [1\ 1\ 1\ 1]^T \|$$

$$\rightarrow \|b\|^2 = \langle [1\ 1\ 1\ 1]^T, [1\ 1\ 1\ 1]^T \rangle$$

$$\rightarrow \|b\|^2 = 4 \rightarrow \boxed{\|b\| = 2}$$

distancia entre b y S.